UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

IV ENCUENTRO DE ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA UNED 2013

Título: Ideas para desarrollar la habilidad específica de analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ mediante el enfoque de resolución de problemas en décimo año.

Marianela Zumbado Castro.
Universidad Estatal a Distancia, Ministerio de Educación Pública
mzumbad2@gmail.com

Resumen

Se presenta un problema para décimo año que modela una situación cotidiana y muestra algunas ideas para desarrollar la habilidad específica de analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática mediante el enfoque de resolución de problemas en concordancia con los nuevos programas de estudio de Matemática.

Palabras Claves

Resolución de problemas, función cuadrática y programas de estudio.

Introducción

Ante los retos que enfrenta la Educación Matemática mundial de promover ciudadanos matemáticamente cultos y con las habilidades para desarrollarse emocional, social y tecnologicamente, los países han realizado cambios en sus procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Nuestro país no es la excepción, ahora enfrentamos una reforma educativa en esta área y se hace inminente la necesidad de compartir experiencias e ideas sobre estrategias, técnicas de trabajo en grupo y materiales empleados en las aulas para favorecer la mediación pedagógica. Con el afán de contribuir con la Educación Matemática se exponen a continuación algunas ideas sobre cómo abordar en décimo año algunas propiedades de la función cuadrática, relacionadas con la habilidad específica: Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ (MEP, 2012, p.411) mediante la resolución de problemas y el uso visionario de la tecnología, acorde con los programas de estudio aprobados por el Ministerio de Educación Pública en mayo del 2012.

Marco Teórico

El trabajo que se presenta es para décimo año, especificamente pretende brindar ideas para desarrollar la siguiente habilidad específica: Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, relacionada con algunas de las propiedades de la misma. Las y los estudiantes deben poseer las siguientes habilidades previas para poder enfrentar el problema: utilizar distintas representaciones para las funciones lineales y cuadráticas, utilizar las ecuaciones de primer y segundo grado para resolver problemas, identificar situaciones dadas que pueden ser expresadas algebraicamente en la forma $\mathrm{y} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ **,** representar tabular, algebraica y gráficamente una función cuadrática e identificar los modelos matemáticos[1] que se adaptan mejor a una situación dada. Por lo tanto, es importante aclarar que se considera que la función cuadrática ya fue estudiada en 9º y que con el problema se persiguen identificar y profundizar en las propiedades de la misma.

En una clase donde se implementa la resolución de problemas como estrategia metodológica se debe iniciar con el planteamiento de un problema como el que se presenta a continuación y se puede sugerir un trabajo en subgrupos de tres estudiantes.

PROBLEMA[2]

[1] Profundizar en los programas del MEP (2012, p.31)
[2] Problema adaptado por Edison de Faria del texto de Tinoco, L. (2009). Construindo o conceito de Função. Instituto de Matemática/UFRJ projeto Fundão – Spec/PADCT/PRES.

Imagen cortesía de FreeDigitalphotos.net

Un conductor, a cierta velocidad, mira un obstáculo en la carretera. Transcurre cierto intervalo de tiempo para que el conductor presione los frenos (tiempo de reacción) y otro intervalo de tiempo para que el vehículo se detenga (tiempo de frenado). Durante los intervalos de tiempo mencionados el vehículo recorre cierta distancia.

El siguiente cuadro representa las distancias recorridas en el tiempo de reacción y de frenado en función de la velocidad de un vehículo liviano (Tinoco, L. 2009).

Velocidad en que se transita y la distancia total recorrida desde el instante en que el conductor mira el obstáculo y el automóvil se detiene.

Velocidad (km/h)	**Distancia total recorrida (m)**
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139

Con base en la información anterior responda las siguientes preguntas:

1. Un conductor de un automóvil que viaja a una velocidad de 60 km/h observa un autobús detenido a una distancia aproximada de 50 m delante de su auto. ¿Logrará el conductor evitar la colisión con el autobús? ¿Y si el vehículo viaja a 100 km/h logrará evitar la colisión? Justifique su respuesta.

2. Las leyes costarricenses obligan que un vehículo pesado se mantenga a una distancia mayor a 50 m del vehículo que va adelante, suponiendo que esta ley se aplica a los vehículos livianos. ¿Cuál es la mayor velocidad que un vehículo debe mantener para evitar la colisión con el vehículo que va adelante, si éste se detiene bruscamente? Justifique su respuesta utilizando los datos del cuadro.

3. Si un conductor viaja a 115 km/h y observa un obstáculo al frente, estime la distancia que su vehículo recorre hasta detenerse. Justifique su respuesta.

4. Construya una posible gráfica de la distancia total recorrida por un automóvil en función de la velocidad.

5. Determine un posible modelo algebraico que describa la distancia total recorrida por un automóvil en función de la velocidad.

6. Si un conductor se encuentra a 50 m de distancia de un semáforo y observa que éste acaba de ponerse en rojo, y que no existen obstáculos adelante ¿a qué velocidad máxima puede viajar para lograr detenerse al llegar al semáforo? Utilice el modelo obtenido en la pregunta 5.

Según el MEP (2012, p.41-47) se denomina ***trabajo estudiantil independiente*** a las acciones que realizan los alumnos para resolver el problema, algunas de éstas se exponen a continuación:

Al realizar la solución del problema se espera que el estudiantado utilice algunas estrategias para determinar las respuestas a las preguntas planteadas, debido a esto para cada una de las preguntas se activará el proceso de Plantear y resolver problemas conforme este proceso se activa se obtienen algunos resultados:

Para la pregunta:

1) Un conductor de un automóvil que viaja a una velocidad de 60 km/h observa un autobús detenido a una distancia aproximada de 50 m delante de su auto. ¿Logrará el conductor evitar la colisión con el autobús? ¿Y si el vehículo viaja a 100 km/h logrará evitar la colisión? Justifique su respuesta.

Se espera que la o el estudiante busque directamente en los datos la información que necesita. La respuesta es directa y se encuentra al observar el número a la derecha de la velocidad de 60Km/h y de 100 km/h. Si la velocidad es de 60 km/h la distancia total recorrida será de 29,34 m que es menor que 50 m, por lo tanto en este caso no habrá colisión, mientras que para una velocidad de 100 km/h la distancia total recorrida será de 69 m que es mayor que 50 m, y en este caso se interpreta que los vehículos colisionarán.

En la pregunta:

2) Las leyes costarricenses obligan que un vehículo pesado se mantenga a una distancia mayor a 50 m del vehículo que va adelante, suponiendo que esta ley se aplica a los vehículos livianos. ¿Cuál es la mayor velocidad que un vehículo debe mantener para evitar la colisión con el vehículo que va adelante, si éste se detiene bruscamente? Justifique su respuesta utilizando los datos del cuadro.

El estudiantado tendrá que hacer una lectura de los datos. La interpretación inmediata es que la velocidad tendrá que ser menor o igual que 80 km/h, suponiendo que tales límites de velocidad son permitidos por ley en la zona de circulación del vehículo. Este tipo de pregunta activa el proceso de Razonar y argumentar.

La pregunta 1 y 2 son ejemplos de problemas de reproducción, debido a que las habilidades adquiridas previamente por las/los estudiantes les permiten hallar de forma directa las respuestas. Asimismo, existe conexión con el área de Estadística debido a que es necesario interpretar información presentada en el gráfico.

Analicemos la siguiente pregunta:

3) Si un conductor viaja a 115 km/h y observa un obstáculo al frente, estime la distancia que su vehículo recorre hasta detenerse. Justifique su respuesta.

La búsqueda de soluciones para esta pregunta es más rica en estrategias. En realidad no se puede determinar la respuesta exacta con los datos proporcionados. Se puede estimar un intervalo para la distancia y, además, decidir si la respuesta es mayor o menor que el promedio de los extremos del intervalo.

Aquí se activa el proceso de Razonar y argumentar, debido a que es necesario realizar un análisis de los datos para justificar la respuesta. Además, en esta parte de la solución son necesarias algunas estrategias, por tanto, el proceso de conexión se activa y esto sucede de dos formas, primero al integrar Números y Estadística y presentar el problema en contexto debido a la problemática con las conductas temerarias en la conducción.

A continuación se presentan algunas posibles soluciones por parte de las y los estudiantes para la pregunta 3, todas ellas son respuestas, sin embargo, se debe promover la obtención de la respuesta óptima, sin desechar las aproximaciones obtenidas:

a) Decir que la distancia se encuentra entre 81 m y 94 m, información que puede expresarse mediante la siguiente desigualdad $81 < d < 94$. Se pueden hacer preguntas por parte del docente para mejorar la respuesta: ¿Pueden hallar un valor aproximado? ¿Cuántos valores posibles hay entre 81 y 94, pueden decirme cuál es?

b) Calcular el promedio de las distancias recorridas por un automóvil que viaja a 110 km/h y a 120 km/h pues la velocidad dada es de 115 km/h, esto es: $\frac{81+94}{2} = 87{,}5$ metros. Pero esta estrategia, pone en evidencia la necesidad de visualizar las posibles respuestas que darán las y los estudiantes e incluso considerar los posibles errores.

   En esta estrategia el estudiantado *supone* que al incrementarse la velocidad (de 110 a 115 y de 115 a 120) hay un aumento en la distancia total recorrida que sigue el mismo comportamiento que la velocidad, pero esto no ocurre debido a que la distancia (d) aumenta más rápidamente para velocidades mayores, por lo tanto lo apropiado será decir que $87{,}5 < d < 94$ metros, esta es una posible solución que requiere del acompañamiento del docente.

   Esta intervención puede realizarse mediante preguntas generadoras que obliguen al estudiantado a mejorar la solución, desechar la estrategia de solución o incluso determinar el error por ellos y ellas mismas. Se debe recordar que el papel docente no es brindar la respuesta o indicar el error sino orientar hacia esto.

c) Utilizar regla de 3 con uno de los datos.

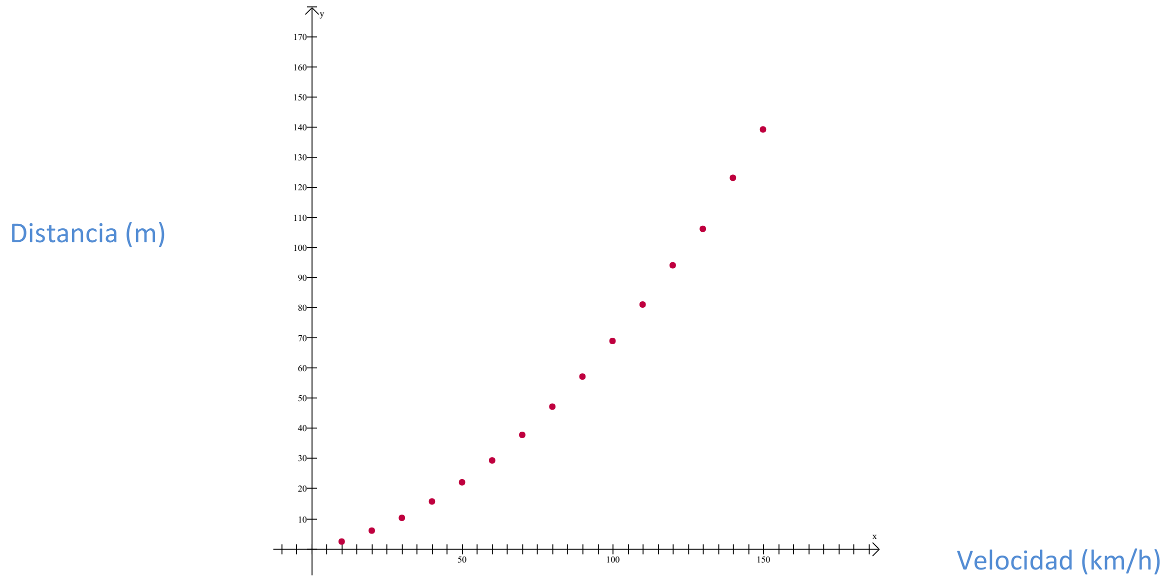
Con 110 km/h:	Con 120 km/h
$110 \rightarrow 81$ $115 \rightarrow x$ Por lo tanto $x \approx 84{,}68$ m.	$120 \rightarrow 94$ $115 \rightarrow x$ Por lo tanto $x \approx 90{,}08$ m

Cuando el estudiantado plantee este tipo de solución, se le deben plantear preguntas como la siguiente: ¿por qué si plantean que son directamente proporcionales, las respuestas son diferentes?, se debe recordar que se está suponiendo que distancia y velocidad son directamente proporcionales, esto permitirá un análisis de la respuesta y además permite insistir en la necesidad de elaborar un modelo que se ajuste lo mejor posible a los datos suministrados.

Para la pregunta:

4) Construya una posible gráfica de la distancia total recorrida por un automóvil en función de la velocidad

Se puede realizar la gráfica ubicando los puntos en el plano de coordenadas y dibujando una curva que pasa por los puntos o bien líneas poligonales que unen los puntos. Es fundamental saber cuál variable se ubica en cada eje de coordenadas. En una representación gráfica se podrá observar que los datos de las dos variables: velocidad y distancia total recorrida no son proporcionales. Con esta actividad se activa el proceso denominado *Representar*. Además, se debe considerar la posibilidad de que las y los estudiantes usen un gráfico de barras para representar la situación lo cual también es apropiado, debido a que se puede visualizar el comportamiento de los datos.



Elaboración propia

Para la pregunta:

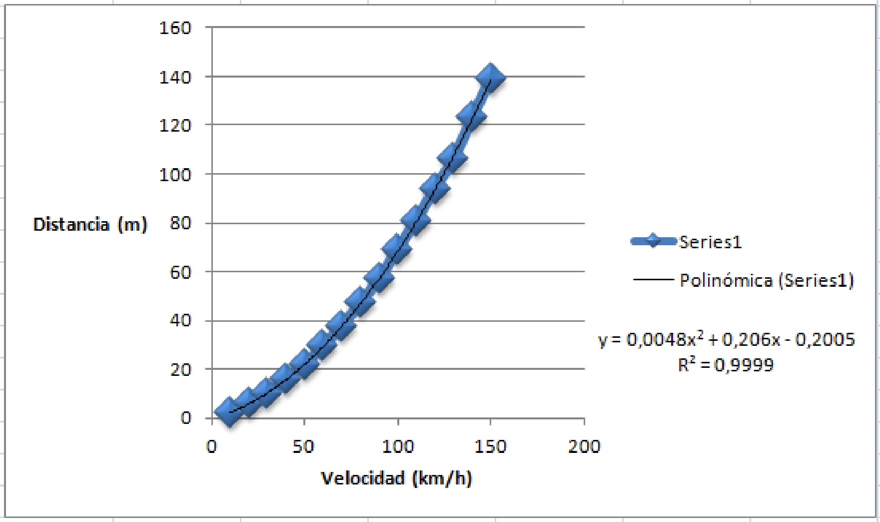
5) Determine un posible modelo algebraico que describa la distancia total recorrida por un automóvil en función de la velocidad.

Es recomendable utilizar tecnología digital. La elaboración del modelo podría ser desarrollada en un laboratorio de computo o bien sugerida como un trabajo extra clase. Se puede utilizar un software como Microsoft office Excel el cual permite construir modelos matemáticos.

Con Microsoft office Excel podemos encontrar la *línea de tendencia* para los puntos correspondientes a los datos de la tabla. Esta *línea de tendencia* es una curva de regresión o curva de mejor ajuste a los datos. Con Microsoft office Excel se puede escoger entre regresión lineal, polinomial (seleccionando el grado del polinomio), logarítmica, potencial y exponencial.

Obteniendo como resultado la siguiente representación, al elegir la polinomial de grado 2 y la ecuación que mejor describe el comportamiento de los datos.

Velocidad (Km/h)	Distancia (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139



La representación algebraica para el modelo polinomial de segundo grado que se ajusta muy bien a los datos de la tabla es $d(v) = 0,0048v^2 + 0,206v - 0,2005$, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0,9999$, indicando que el modelo proporciona una buena predicción para la variable dependiente (distancia, en metros) como función de la variable independiente (velocidad, en km/h).

Sin embargo, puede permitirse al estudiantado experimentar en el gráfico de dispersión, las opciones de líneas de tendencia antes de elegir la polinomial de segundo grado.

Asimismo, dentro del trabajo a desarrollar puede proponerse verificar las respuestas en la fórmula hallada.

Continuando con el análisis de la solución del problema:

6) Si un conductor se encuentra a 50 m de distancia de un semáforo y observa que éste acaba de ponerse en rojo, y que no existen obstáculos adelante ¿a qué velocidad máxima puede viajar para lograr detenerse al llegar al semáforo? Utilice el modelo obtenido en la pregunta 5.

Se debe utilizar el polinomio encontrado en el inciso 5 para responder la pregunta 6. Para ello se remplaza *d* por 50 metros. Utilizando una calculadora científica o bien Excel, resolvemos la ecuación $0,0048v^2 + 0,206v - 0,2005 = 50$. Las soluciones aproximadas son *v* = 83 km/h,

v = -126 km/h. En este caso la solución es la positiva. Por lo tanto la velocidad máxima a la que puede ir el vehículo para lograr detenerse al llegar al semáforo es de aproximadamente 83 km/h.

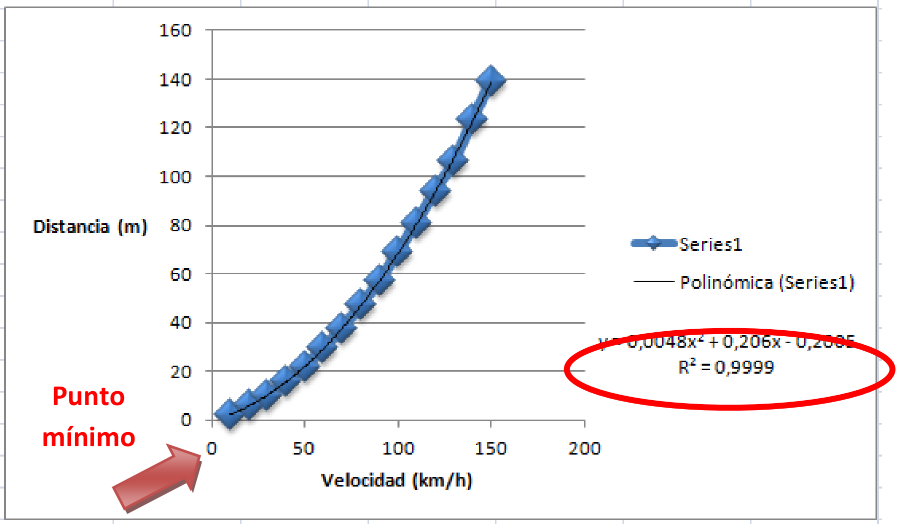
Finalizado el trabajo de los estudiantes en la solución del problema se procede a la ***discusión interactiva y comunicativa*** de los resultados. En este momento se espera que el estudiantado comparta sus hallazgos con los demás miembros de la clase, por ejemplo que comuniquen las estrategias utilizadas, incluso aquellas que no fueron exitosas, así como las respuestas encontradas, nuevamente en este espacio se activa el proceso Razonar y argumentar, así como el de Comunicar. Se espera además, que las y los estudiantes debatan unos con otros sobre la veracidad de las respuestas halladas y las estrategias empleadas.

Se sugiere que un representante de cada subgrupo comunique las ideas respecto a cada pregunta. Este proceso será dirigido por el o la docente, solicitando la respuesta a cada pregunta. Hay dos posibilidades: la primera analizar las preguntas de una en una o recolectar todas las respuestas y realizar un análisis al final de la plenaria. En ambos casos se debe formalizar algún concepto a raíz de las respuestas proporcionadas por el estudiantado.

Una vez que el estudiantado comparta los hallazgos encontrados con los demás compañeros y compañeras de clase, el docente puede mostrar otras posibles soluciones si las existiera en este momento.

Cuando el docente procede a realizar la ***clausura o cierre*** debe retomar las soluciones del estudiantado e indicar los conceptos que estaban implícitos en la solución del problema. Utilizando la tabla y la gráfica obtenida se pueden establecer conceptos relacionados con la función cuadrática.

Velocidad (Km/h)	Distancia (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139



Se puede indicar que $y = 0{,}0048\,\mathrm{x}^2 + 0{,}206\,\mathrm{x} - 0{,}2005$ es un ejemplo de una función cuadrática, cuyo comportamiento visible es creciente, la velocidad en este caso, recibe el nombre de variable independiente y sus valores se denominan preimágenes. La distancia recibe el nombre de variables dependiente y sus valores son denominados imágenes.

Es importante resaltar que los valores asociados a la distancia son imágenes y reciben el nombre de variables dependientes debido a que cada uno de los datos de distancia se origina de acuerdo a la velocidad. Con los datos del problema se pueden indicar otros conocimientos como: punto mínimo o máximo. Posteriormente se pueden incluir los conocimientos clásicos de la función cuadrática como los siguientes: el criterio de la función, punto de intersección con los ejes, eje de simetría, vértice, concavidad, entre otros conocimientos que se pretenden en el programa.

En las indicaciones puntuales (MEP, 2012, p.411), se menciona que debe estudiarse la influencia de los parámetros a, b y c en el tipo de gráfica, esto puede lograrse de distintas maneras:

a) emplear la técnica de completar cuadrados

b) utilizar transformación en el plano: homotecias y traslaciones

c) Proponer actividad de laboratorio para llegar a concluir el comportamiento de los parámetros.

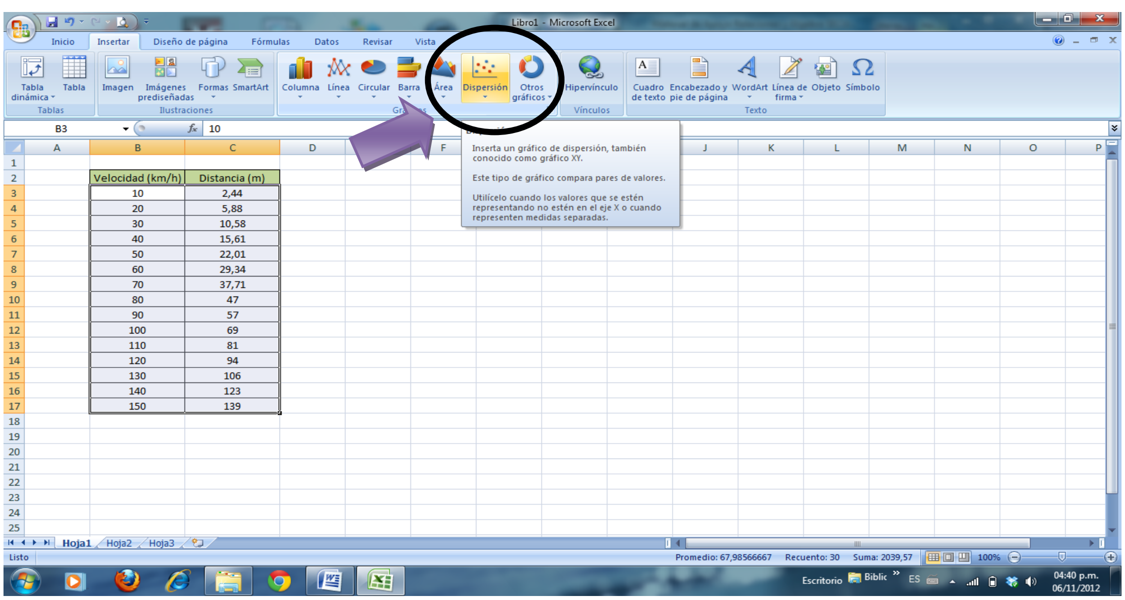
En la solución de un problema como el planteado el uso de una hoja de cálculo puede ser una herramienta muy valiosa para potenciar las habilidades pretendidas con este problema, en las indicaciones puntuales de esta habilidad (MEP, 2012, p.411) se muestra que:

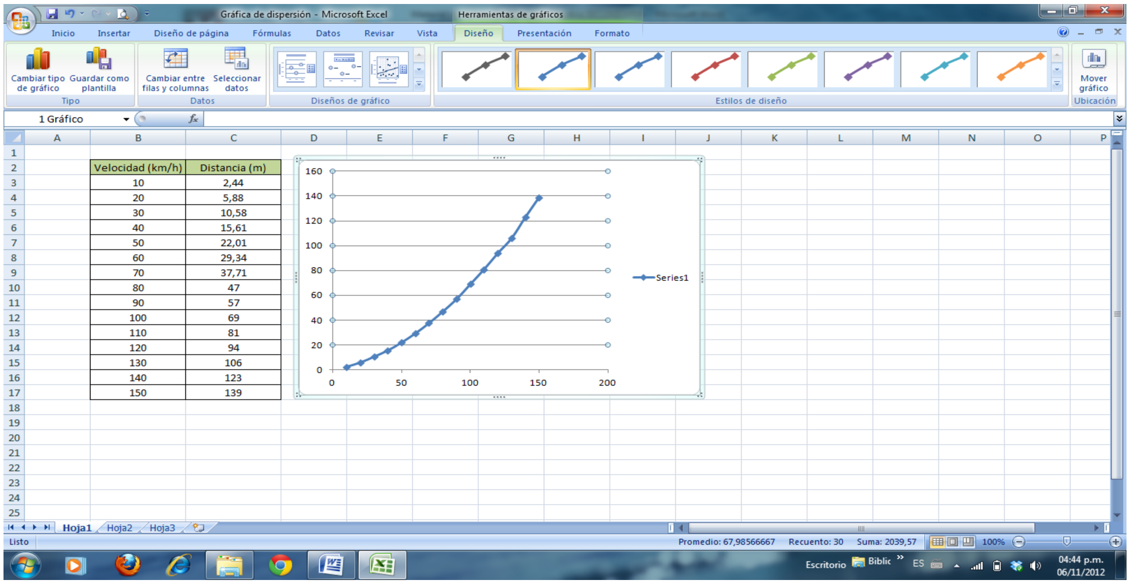
> Es recomendable usar software matemático para facilitar la observación de las características descritas para $y = ax^2 + bx + c$ y para aproximar soluciones de ecuaciones de segundo grado.

Como se indicó anteriormente una hoja de cálculo puede permitir encontrar la "línea de tendencia" para los puntos correspondientes a los datos de la tabla y además con esta herramiente se puede escoger cualquiera de las siguientes curvas: regresión lineal, polinomial, exponenecial, entre otras, según sea conveniente.

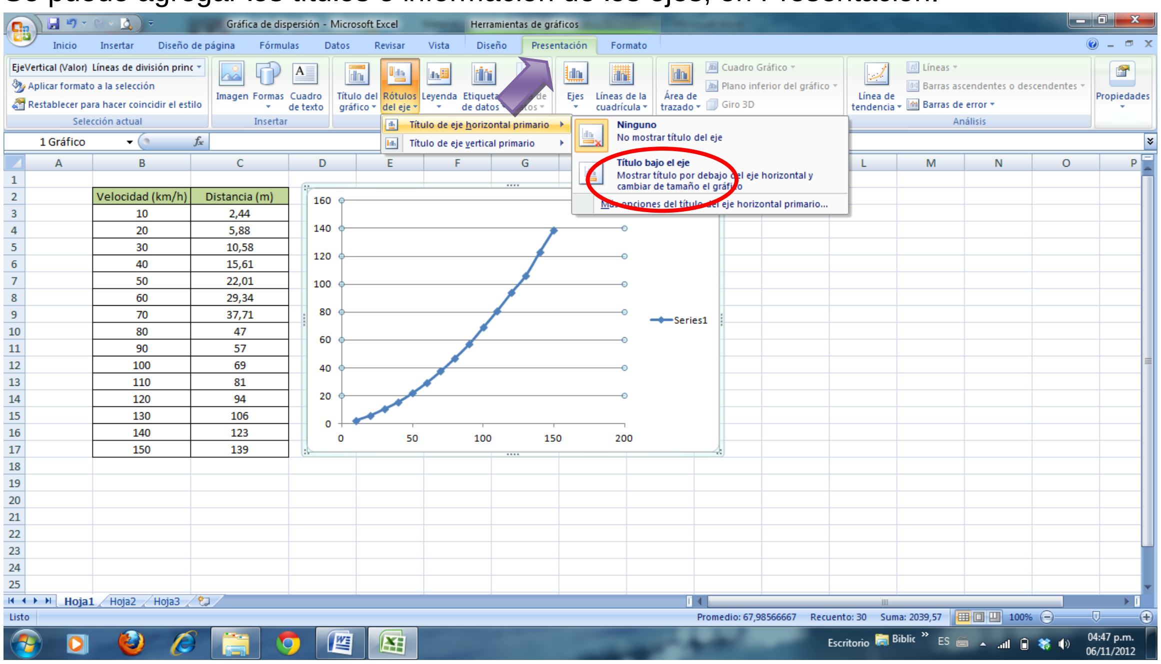
A continuación se detallan los pasos a seguir para poder realizar la representación de los puntos y una ecuación de segundo grado que se ajuste a los datos:

- Digitamos la tabla en Excel.
- Seleccionamos las dos columnas.
- Insertamos una gráfica tipo dispersión.

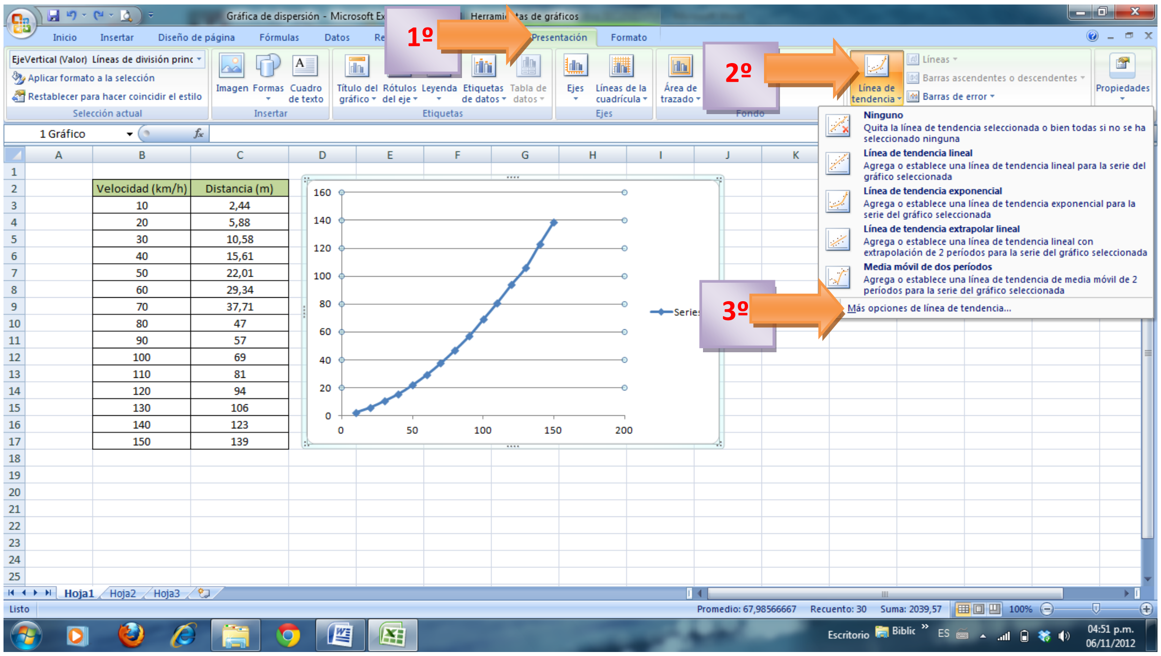




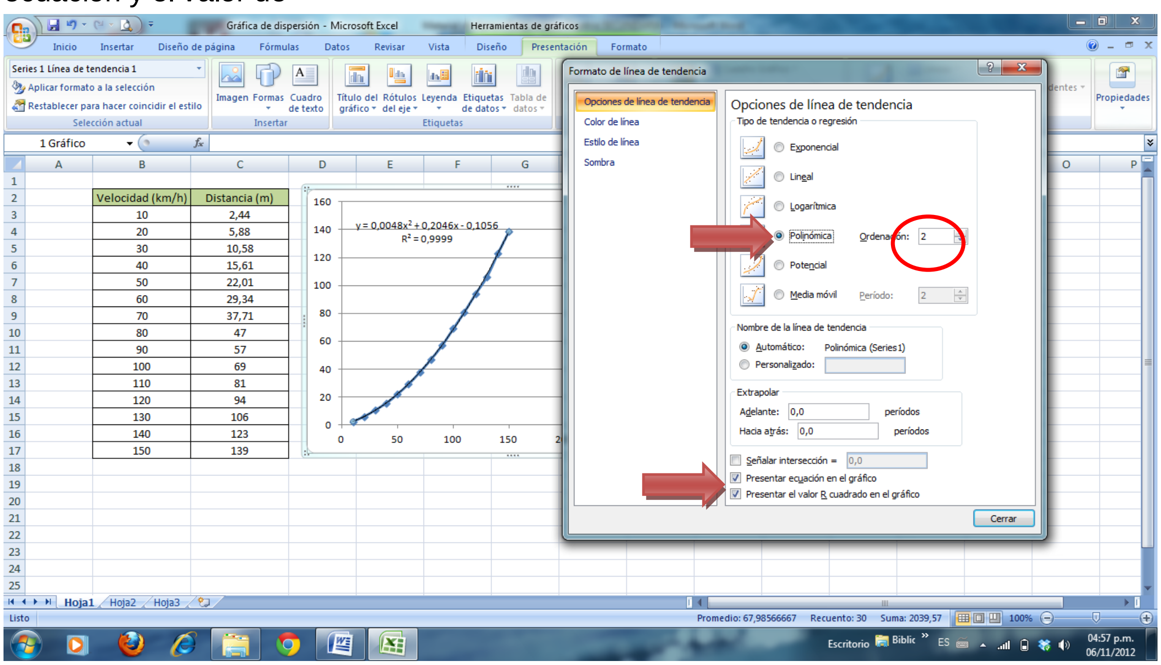
- Se puede agregar los títulos e información de los ejes, en Presentación.



- Seleccionamos el gráfico construido por Excel.
- Escogemos la opción *presentación*, línea de tendencia, *más opciones* línea de tendencia.

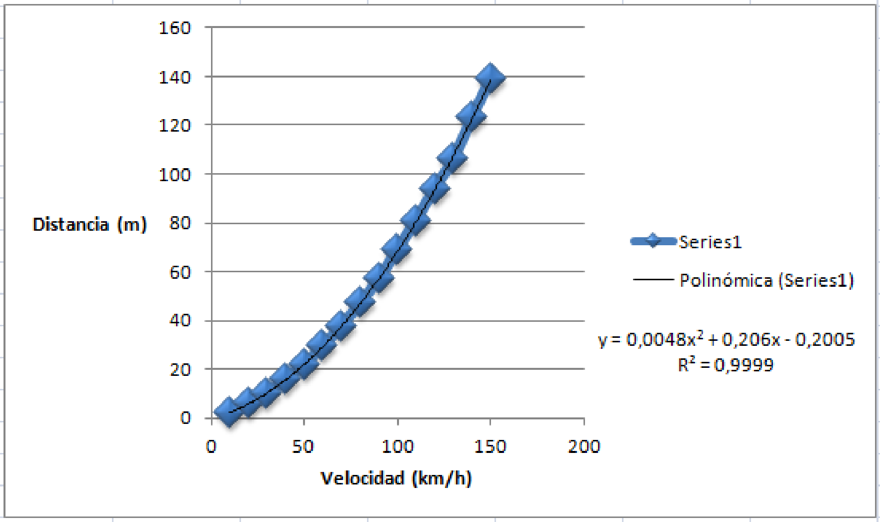


- En este caso escogemos un polinomio de orden 2 y marcamos las opciones: presentar ecuación y el valor de R^2.



Finalmente, el resultado es el siguiente, donde se puede tener los datos y la representación gráfica, así como una ecuación de segundo grado que modeliza la situación planteada.

Velocidad (Km/h)	Distancia (m)
10	2,44
20	5,88
30	10,24
40	15,61
50	22,01
60	29,34
70	37,71
80	47
90	57
100	69
110	81
120	94
130	106
140	123
150	139



La representación algebraica para el modelo polinomial de segundo grado que se ajusta muy bien a los datos de la tabla es $d(v) = 0,0048v^2 + 0,206v - 0,2005$, con un coeficiente de determinación $R^2 = 0,9999$, indicando que el modelo proporciona una buena predicción para la variable dependiente (distancia) como función de la variable independiente (velocidad).

Es muy importante que las/los docentes tomen en cuenta la siguiente información: en las gráficas generadas por Excel, aparece la ecuación del modelo y un número etiquetado con R^2. Este número se conoce como *coeficiente de determinación*, que mide la "bondad del ajuste realizado". La "bondad de predicción o de ajuste" depende de la relación entre las variables. Si dos variables no covarían, no se puede hacer predicciones válidas. La medida de la capacidad del modelo de regresión para obtener buenas predicciones es el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson, e indica la proporción de variación de la variable dependiente ***y*** que es explicada por la variable independiente *x* (variable predictora o explicativa).

El coeficiente de determinación varia de 0 a 1. Un valor cero indica que la variable predictora tiene capacidad nula para explicar o predecir la variable ***y***. Cuánto más cercano a 1 sea R^2, mejor será la predicción.

Conclusiones

Con se mencionó en la introducción del trabajo, se pretende contribuir con la Educación Matemática del país ofreciendo algunas ideas para desarrollar la habilidad específica de analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática mediante el enfoque de resolución de problemas en concordancia con los programas de estudio de Matemática del MEP (2012), por esa razón se proponen las siguientes reflexiones:

- El problema propuesto ofrece algunas ideas sobre el estilo de organización de la lección de Matemáticas, pasando por los cuatro momentos mencionados en los fundamentos de los programas del MEP (2012).

- Asimismo, muestra el uso de la tecnología como herramienta pedagógica para favorecer la identificación de las características de la función cuadrática que son exploradas de manera intuitiva por los estudiantes mediante la resolución de problema planteado.

- El análisis de la solución del problema ofrece al docente una visión sobre el desarrollo del conocimiento de las y los estudiantes a través del trabajo realizado por ellos. Además, muestra de manera explícita la función protagónica del docente en la elaboración del problema y la mediación pedagógica en la etapa de trabajo independiente, debido a que debe estar atento a ofrecer preguntas generadoras que permitan al estudiantado detectar un error o establecer una mejor estrategia de trabajo.

- El problema propuesto permite al estudiantado la posibilidad identificar en el trabajo realizado de manera independiente o grupal los conocimientos matemáticos de manera previa a la formalización lo que permite un apropiamiento de esos conocimientos. Por ejemplo: no basta con decir qué es una variable dependiente, las y los estudiantes ya trabajaron con la relación de los datos y pueden comprender el concepto porque fue interiorizada mediante el trabajo con la resolución del problema.

- La estrategia metodológica empleada en esta propuesta dista de la clase tradicional, se promueve el trabajo del estudiantado a través de sus habilidades y conocimientos previos para que entre en contacto con nuevos conocimientos y fortalezca o amplíe habilidades mediante su experiencia con los objetos de aprendizaje, en este caso la función cuadrática, este tipo de actividad promueve las actitudes positivas hacia la matemática, debido a que ofrece respuesta a la pregunta que el estudiantado plantea ¿para qué me sirve? Durante el proceso de solución del problema, esta respuesta surge de manera ímplicita al resolver el cuestionamiento, impactando el aprendizaje de la matemática y la concepción tradicional de la misma.

- Finalmente, el uso de la tecnología ofrece una versatilidad que no se obtiene con la tiza y la pizarra, debido a que el recurso tecnológico puede mostrar múltiples elementos de manera casi imnediata, mientras que con otros recurso esto requiere de mucho más tiempo y esfuerzo.

Referencias Bibliográficas

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). Programas de estudio en Matemáticas I, II y III Ciclo de la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.

Tinoco, L. (2009). Construindo o conceito de Função. Instituto de Matemática/UFRJ projeto Fundão – Spec/PADCT/PRES.

The National Council of Teachers of Mathematics (2006) Historical topics for the Mathematics classroom. Reston: NCTM, Inc.